ヘテロクリニック軌道のネットワークと関連するアトラクター

大阪大学大学院 理学研究科　茶碗谷 毅 [1]

1 はじめに

カオスに関する研究がすすむことにより、一見非常に複雑に見える現象も場合によっては低自由度の力学系の運動と対応付けて理解することが可能であるという例がいろいろと知られてきた。しかし少数自由度のカオスに帰着させて理解することができる現象はやはり限られており、未だに力学的な理解が及んでいない現象は多い。これらの少数自由度の系に帰着させることが難しい複雑さを持った運動のうち、何らの意味で「準安定」な状態が関係するようなものに着目し、"準安定"状態間の関係を手がかりとして運動を理解するというアプローチから幾つかの新しい成果が得られてきている。ここで扱うタイプの運動は、例えば多数の自由度を持つ系において、部分的・一時的な秩序構造が生成・崩壊することによって実効的な自由度が変化するというようなものであり、複雑な系の力学を理解する上で一つの鍵となる可能性をもつ型の運動であると考えられる。

散逸的な力学系において考える場合、準安定状態は「サドル」的な平衡点などに対応すると考えられるだろう。このような準安定な状態が関与するような力学的構造については、大雑把にくくると相空間の大域的な構造の影響、及び準安定状態近傍での局所的な性質という二つの側面から研究が進められていて、それぞれ新しいタイプの系の振る舞いと結び付けられるような構造が見つかってきている。準安定状態の周りの局所的な性質が主に関係するものについてはここでは触れないが、 riddled basin を持つアトラクターや on-off intermittency 等、ストレンジアトラクターが不安定化する際に現われるサドル的な集合と強く結び付いた現象が知られており、これらについても研究がすすめられている。また、ヘテロクリニック軌道のサイクルあるいはネットワークのような大域的な構造と関係する現象として、準安定状態間をカオス的な規則に従いながら遷移し続ける運動などが見つかっている。

これらの現象、特に二つ目のグループとして挙げたような幾つかのサドルとヘテロクリニック軌道が関係する大域的な構造は、系を微小に変化させた場合に定性的な変化を起こす可能性があるようなものであり、ある意味で特殊な構造とも考えられる。しかし、適当な対称性のようなある種の制約条件を持った系を考える場合には、これらの構造はごく普遍的なものとして現れうる。様々な対称性を持つモデルが自然科学の広い範囲において重要な役割を果たしていることを考慮すると、何らかの対称性の存在を前提とした構造ではあるものの、これらの構造について調べることには意味があると考えられる。

これらのヘテロクリニック軌道がつくるネットワーク構造の近傍における軌道の振舞いは、幾つかの「準安定」状態に近付いてしばらく滞在した後に離れるということを繰り返すものになる。ここでは主にこれら振舞いの背景にある相空間の規則性や、ヘテロクリニック軌道のネットワークが誘起する複雑なアトラクターなどについて紹介したい。

[1]E-mail: chawanya@math.sci.osaka-u.ac.jp

2 不変な超平面を持つ系と、ヘテロクリニック軌道

ここでは、レプリケーター方程式系と呼ばれる常微分方程式系を作業モデルとして考える。これは戦略の進化のモデルとして提案された方程式系だが、自己複製を行う素子が複数種類存在する系のモデルとしての基本的な性質を持っており、最も単純な生態系のモデルの一つであると見ることができる [3]。

この系の時間発展は次のような微分方程式で与えられている。

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \tag{1}$$

$$\lambda_i \equiv \sum_j g_{ij} x_j - \sum_j \sum_k g_{jk} x_j x_k \tag{2}$$

ここで $x_i, (i = 1, \cdots, n)$ は各種の個体数の総数に占める比率を表す変数で、各成分 x_i は非負でかつ

$$\sum_i x_i = 1, \tag{3}$$

という拘束条件を満たす。λ_i はそれぞれの種の個体数の増殖率に対応しており、$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の関数として与えられている。g_{ij} は i 番目の種に対し j 番目の種の個体が及ぼす影響を表すパラメータを表す。

(2) 式の第一項は基本的に二体間の相互作用に対応する項で、i 番目の種の増殖率に対する j 番目の種の影響を表している。第二項は全体の増殖率の平均値がゼロになるように全ての種の増殖率から同じ値を差し引いている項である。このため x_i の和は常に 1 に保たれる。

時間発展方程式の形 (1) からわかるように、この系は n 個の超平面 $x_i = 0, (i = 1, \cdots, n)$ をそれぞれ不変に保つ。当然、これらの超平面の適当な交わり (つまり幾つかの成分がゼロになるような超平面) もそれぞれ常に不変に保たれることになる。これらの超平面によって作られる $(n-1)$ 次元の単体が、この系の相空間の枠組みをつくっている。この性質は複数のサドルとそれらを結ぶヘテロクリニック軌道のネットワークが存在するために重要なものである。モデル方程式そのものの簡単さもあり、このモデル系はヘテロクリニック軌道の作る大域的な構造、さらにその近傍における軌道の振舞いを研究する上で都合の良いものになっている。

ここで、ヘテロクリニック軌道の" 壊れやすさ" について少し見てみる。サドルは不安定な方向を持つため、時間とともにこれらのサドルに漸近する軌道は特殊な初期条件を持つものでなければならないと考えられる。実際、特に拘束を与えられない一般的な力学系においては、複数のサドル的な準安定状態間をループ状につなぐようなヘテロクリニック軌道のネットワークは、力学系に微小な摂動を与えると一般的には壊れてしまう。このためこのようなネットワークは特殊な存在であると考えられる。しかし、ここで考えているレプリケーター系の場合のように、パラメータの値等によらずに常に不変に保たれる超平面が存在する場合には、パラメータ空間の適当な領域にわたって、サドル間をつなぐネットワーク構造が存在できる。以下ではこの「構造安定」なヘテロクリニック軌道が作るネットワークについて少し詳しく見ていくことにする。

系に含まれる成分 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ のうち幾つかを選んで、それらの成分の値がゼロになるという条件を与えると、一つの超平面が得られるが、この面は (1) によって不変に保たれる。一般的にこれはゼロになる成分をどのように選んだ場合でも成り立ち、またこの超平面上には一つ以上の平衡点が存在する (ただしそれらは安定とは限らない) 。相空間全体をみるとこのような相空間の骨組みの上には平衡点が多数存在することになる。

それらの中には、その平衡点がのっている超平面上の流れについて安定になっているようなものが幾つかあるだろう。このようなサドルの不安定方向は、その超平面と交わる方向を向いている。つまり軌道がこのサドルから離れる際には、サドルの上で $x_i = 0$ となるような成分のうちの少なくとも一つが成長することになる。とりあえず不安定方向（不安定成分）が一つだけの場合を考えると、$\vec{x}$ の各成分は非負であるとしているので、このサドルの不安定多様体はただ一つの軌道からなることになる。

この軌道自体もある自明な不変超平面上にのっているとすると、その行きつく先はこの平面上のながれに対して、安定平衡点等のアトラクタになっているというのが自然である。先に述べた自明な不変超平面を壊さずに不変のまま保つような摂動（ゲーム力学系におけるパラメータの変化等はこの条件を満たしている）を考えると、この軌道の始点・終点そして軌道そのものは、どれもこの不変超平面から外れることはない。従って、例えばこの軌道が平面上の流れについての安定平衡点に漸近する場合を考えると、これは十分微小な摂動によっては壊されない構造安定なものになることが期待できる。この終点が平面と交わる方向に対しては不安定になっているような場合には、結局この軌道は二つのサドルをつなぐ（構造安定性を持つ）ヘテロクリニック軌道ということになる。

これらのヘテロクリニック軌道の存在は、それぞれ関係する超平面上の流れ、つまり n 種のうちの一部分の種だけからなる「部分系」のダイナミクスにのみ依存するため、適当なサイクル構造を持つヘテロクリニック軌道のネットワークを持つ様な系を構成することも比較的簡単である。最も単純な例としては、三すくみ型の相互作用を持つ３種の系におけるヘテロクリニックサイクルが古くから知られている。また枝わかれを含むようなより複雑なタイプのネットワークも同様に「構造安定」になることができる。

3　ヘテロクリニック軌道のネットワークの近傍での運動

ヘテロクリニック軌道のネットワークは、しばしば一種の「アトラクター」として軌道を引き寄せる。そこで、これらのネットワーク近傍での軌道の振舞いについて調べてみることにする。このネットワーク近傍での軌道の振舞いを調べる際には、軌道と各不変超平面との間の距離、特にその値がゼロに近いところでの変化が重要になってくる。そこで、便宜上各成分の対数

$$y_i \equiv \log x_i, \tag{4}$$

をとったものを考えると見通しがよい。この変数変換は、$x_i = 0$ となる成分が存在する場合については適用できないが、扱う軌道は全ての成分が正の値をとる軌道のみを考える事にする。つまりここでは、相空間の骨組み上のヘテロクリニックネットワークと、そのネットワークのすぐ近くを通っているが、不変超平面にはのっていない軌道を考えることにする。

この場合、軌道はヘテロクリニック軌道に沿ってサドルのかなり近くを通ることになるが、その際サドルの近くで長い時間を過ごすことになる。軌道とネットワークとの間がとても近い場合には、サドル間のとび移りにかかる時間と比べて、サドルの近くに留まる時間は圧倒的に長くなる。

ここで、先ほどの y_i の変化を考えてみると、単位時間あたりの変化率は限られており、サドル近傍における変化が y_i の変化のほとんどの部分を占めることになる。そのため $\vec{y}$ の変化を見る上ではサドルの性質が重要ということになる。

軌道が経由する各サドルが通常の平衡点の場合、流れをサドルのまわりで線形化して扱うとことにより、サドル近傍における $\vec{y}$ の変化に対する線形写像による近似が得られる。これを組み合わせると、ネッ

トワーク近傍の面から幾つかのサドルを経由して元の面に戻ってくる間の $\vec{y}$ の変化を表す帰還写像が近似的に得られる。経路が決まっている場合には、経由するサドルに対応する線形写像を順にかければよい。また、経路上に２つ以上の不安定方向を持つサドルがある「枝わかれ」したネットワークの場合には、帰還写像は単純な線形写像の積では表せないが、やはり任意の正の実数倍と可換な写像で近似することができる。

この帰還写像を使ってサドル間のとび移りの性質（経由するサドルの順序など）を調べることができ、パラメータによってはサドルの経由順序が非周期的になるなどカオス的な力学系の持つ性質が現れる場合もありえることなどがわかっている。[5]

帰還写像が任意のスケール変換に対して不変であることから、この近似が有効なネットワークの近傍においては、ネットワークと軌道との間の距離は時間とともに（平均的には）減少／増大し続けることになる。ヘテロクリニックネットワークに漸近する軌道の振舞いを観察すると、経由する各サドルへの滞在時間が軌道とネットワークとの間の距離に応じて変化するため、運動のタイムスケール自体が変化し続ける非定常性が見られることになる。

4　階層的なヘテロクリニックネットワークと無限の繰り返し構造

ここで考えているような不変平面の存在は、より複雑な構造をもつヘテロクリニックネットワークの存在も可能にしている。前節ではサドルからのびる不安定軌道の行き先が、適当な（超）平面上で相対的に安定な平衡点となる場合について考えたが、一般的な可能性としてはこの行き先は、この平面上における相対的な”アトラクター”であればどんなものでもよい。実際、軌道の行き先がヘテロクリニック軌道のネットワークとなっているものも同じように構造安定なヘテロクリニック軌道として存在することができる。この場合（超平面上の）ヘテロクリニック軌道のネットワーク全体を一つのサドルとして含む、大きなヘテロクリニックネットワークが存在することになる。このようなネットワークの近傍では、軌道の振舞いはかなり複雑なものになりうるが、前節の議論に若干の拡張を行うことによってこの場合についてもある程度の解析が可能になる。

基本的には前節と同様に、各サドルの近傍とそれ以外の部分という分割を行い、それぞれの区間における $\vec{y}$ の変化を近似的に評価した後、それらの近似写像の組み合わせとして得られる近似帰還写像の性質を調べることによって、ネットワーク近傍での軌道の振舞いを解析することができる。ただし、ここで扱うのは「サドル的平衡点」の代わりに「サドル的ヘテロクリニックサイクル」を含むようなネットワークになる。「子サイクル」の近傍での $\vec{y}$ の変化は通常のサドルの場合とは異なる性質を持ち、前節で述べたようなタイプの線形写像では近似できない。そのため帰還写像全体の性質や、軌道の漸近的振舞いも前節の場合とは異なったものになっている。

この場合線形写像による近似はうまくいかないが、子サイクルの近傍における軌道の振舞いが幾何級数的に延びる周期を持つ振動運動になることを利用して、$\vec{y}$ の変化を近似的に表す写像をえることはできる。軌道が最初に子サイクルに接近する時点における $\vec{y}$ の各成分をこの周期の伸び率（公比）の自然数乗倍すると、子サイクル近傍への滞在時間及びその間の $\vec{y}$ の各成分の変化量もこれにほぼ比例して変化することになる。つまり子サイクルの近傍における $\vec{y}$ の変化は離散的なスケール不変性を持つ非線形写像によって近似できることになる。

この離散的なスケール不変性は、適当な断面における帰還写像にも現れる。この性質に関連して見られる面白い現象の一つの例として、無限個のアトラクターの列が共存するというものがある。[6] 帰還写像は、離散的なスケール不変性に対応して、適当なユニットをもつ繰り返し構造を持つ。この繰り返しの各ユニット内にそれぞれ安定平衡点などのアトラクターを持つことが可能になっている。この場合、可算無限個のアトラクター（各々は安定なリミットサイクルやストレンジアトラクターといった、いわゆるふつうのアトラクター）の列が、階層的構造を持つヘテロクリニックネットワークに集積するような形で共存することになる。

5 おわりに

本稿ではヘテロクリニック軌道がつくるネットワーク構造とそのまわりでの軌道の振舞いについて大雑把に紹介した。ここで紹介したのはごく単純なモデル系で具体的に観測されている現象と直接の対応が見つかっているものではない。しかし、対称性を持つ系はそれに対応した不変集合をもつことから、様々な系のダイナミクスにヘテロクリニック軌道のネットワークが関与している可能性は考えられるだろう。いずれこのような例が見つかることを期待している。

ここで見てきたような比較的単純な微分方程式系に限ってみても解析はまだ不十分な点が多い。例えば、サドル的不安定性を持つ周期軌道、あるいはサドル化した「ストレンジアトラクタ」を構成要素として含むようなネットワークを考える場合、これら広義の「サドル」から離れていく軌道の大域的振る舞いが重要になるが、これは良くわかっていない面が多く、今後の課題であると考えている。

参考文献

[1] 茶碗谷 毅, Population dynamics でみられる無限個のアトラクタの共存 — 有効な自由度の動的な変化を伴う運動の特異性について, 数理科学, 1996/6, 44-49

[2] 茶碗谷 毅, ヘテロクリニック軌道のつくる大域的構造と軌道の特異な振舞い, 数理科学, 1997/11, 45-51

[3] J. Hofbauer and K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, (1988)；生物の進化と微分方程式（日本語訳: 竹内康博）現代数学社 (1990); J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge Univ. Press, (1998)

[4] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Math. Sciences, **42**, New York-Heidelberg-Berlin:Springer, (1983).

[5] T. Chawanya, *A new type of irregular motion in a class of game dynamics systems*, Progress of Theoretical Physics, **94**: 163-179, (1995).

[6] T. Chawanya, *Infinitely many attractors in game dynamics system*, Progress of Theoretical Physics, **95:** 679-684, (1996).